

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ –
08.02.2026
CLASA a X- a

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete.
- Timpul efectiv de lucru este de trei ore.

Subiectul I (20 puncte)

Să se arate că:

- a) $\log_2 5 + \log_5 2 > \log_2 5 \cdot \log_5 4$;
- b) $(\log_6 12 - \log_{12} 24)^{-1} \in (8; 10)$.

Subiectul II (20 puncte)

Fie n număr natural, $n \geq 3$ și $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ cu $[a_1] = [a_2] = \dots = [a_n] = 4$.

Să se arate că:

$$\log_{a_1} (9a_2 - 20) + \log_{a_2} (9a_3 - 20) + \dots + \log_{a_n} (9a_1 - 20) \geq 2n.$$

Subiectul III (25 puncte)

Să se determine funcțiile $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ cu proprietatea

$$f(f(n+1)) = f(f(n)+1) = n + 4053, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

Subiectul IV (25 puncte)

Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$ și $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$. Să se arate că

$$|z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 - 3z_1z_2z_3| = 4.$$